TEMA 10 – APLICACIONES DE LA DERIVADA

10.1 – RECTA TANGENTE A UNA CURVA EN UNO DE SUS PUNTOS

Si f(x) es derivable en x_0, **la ecuación de la recta tangente** a la gráfica de y = f(x) en x_0 es: $\mathbf{y - f(x_0) = f\,'(x_0).(x - x_0)}$

Práctica :
[1] Si nos dan el punto de tangencia $x = x_0$:
Hallamos $f(x_0)$, $f\,'(x) \Rightarrow f\,'(x_0)$ y aplicamos la fórmula: $y - f(x_0) = f\,'(x_0).(x - x_0)$
[2] Si nos dan la pendiente de la recta tangente m:
$m = f\,'(x) \Rightarrow$ Resolvemos la ecuación y obtenemos x_0 y procedemos como en [1]

10.2 – INFORMACIÓN EXTRAÍDA DE LA PRIMERA DERIVADA

10.2.1 – CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO DE FUNCIONES

f creciente en x_0 $\Leftrightarrow$ Existe un entorno del punto x_0 $(x_0 - a, x_0 + a)$ tal que:
Si $x_0 - a < x < x_0$, entonces $f(x) < f(x_0)$
Si $x_0 < x < x_0 + a$, entonces $f(x) > f(x_0)$

f decreciente en x_0 $\Leftrightarrow$ Existe un entorno del punto x_0 $(x_0 - a, x_0 + a)$ tal que:
Si $x_0 - a < x < x_0$, entonces $f(x) > f(x_0)$
Si $x_0 < x < x_0 + a$, entonces $f(x) < f(x_0)$

10.2.2 – RELACIÓN DEL CRECIMIENTO DE UNA FUNCIÓN CON EL VALOR DE SU DERIVADA

f(x) derivable y creciente en $x_0 \Rightarrow f\,'(x_0) \geq 0$

f(x) derivable y decreciente en $x_0 \Rightarrow f\,'(x_0) \leq 0$

10.2.3 – CRITERIO PARA IDENTIFICAR TRAMOS CRECIENTES O DECRECIENTES A PARTIR DEL SIGNO DE LA DERIVADA

Si $f\,'(x_0) > 0 \Rightarrow$ f es creciente en x_0

Si $f\,'(x_0) < 0 \Rightarrow$ f es decreciente en x_0

MÁXIMOS Y MÍNIMOS RELATIVOS. DEFINICIÓN

f tiene un máximo relativo en el punto de abscisa $x_0 \Leftrightarrow$ Existe un número a tal que si $x \in (x_0 - a , x_0 + a)$ entonces $f(x) < f(x_0)$

f tiene un mínimo relativo en el punto de abscisa $x_0 \Leftrightarrow$ Existe un número a tal que si $x \in (x_0 - a , x_0 + a)$ entonces $f(x) > f(x_0)$

CONDICIÓN NECESARIO DE MÁXIMO O MÍNIMO RELATIVO EN FUNCIONES DERIVABLES

Si f(x) es derivable en x_0 y tiene un máximo o mínimo en él, entonces $f'(x_0) = 0$. Es decir: f(x) máximo o mínimo en $x_0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$

REGLA PARA IDENTIFICAR EXTREMOS RELATIVOS

Para saber si un punto singular ($f'(x_0) = 0$) es máximo relativo, mínimo relativo o punto de inflexión, estudiaremos el signo de la derivada en las proximidades del punto, a su izquierda y a su derecha.

Máximo:	$f' > 0$ a su izquierda	$f'(x) < 0$ a su derecha
Mínimo:	$f' < 0$ a su izquierda	$f'(x) > 0$ a su derecha
Inflexión:	f' tiene el mismo signo a ambos lados del punto.	

10.3 – INFORMACIÓN EXTRAÍDA DE LA SEGUNDA DERIVADA

DEFINICIÓN DE CONCAVIDAD, CONVEXIDAD Y PUNTO DE INFLEXIÓN

Tenemos una curva y = f(x). Trazamos la recta tangente a ella en un punto P, cuya ecuación es y = t(x). Entonces:

- Si en las cercanías de P es f(x) > t(x), la curva es **convexa** en P.
- Si en las cercanías de P es f(x) < t(x), la curva es **cóncava** en P.
- Si la tangente atraviesa la curva en P, es decir, si a la izquierda de P es f(x) < t(x) y a la derecha f(x) > t(x), o viceversa, P es un **punto de inflexión**.

RELACIÓN DE LA CURVATURA CON LA SEGUNDA DERIVADA

Si f tiene segunda derivada en x_0, se cumple que:

- f **convexa** en $x_0 \Rightarrow$ f ' es creciente en $x_0 \Rightarrow f''(x_0) \geq 0$
- f **cóncava** en $x_0 \Rightarrow$ f ' es decreciente en $x_0 \Rightarrow f''(x_0) \leq 0$
- f tiene un **punto de inflexión** en $x_0 \Rightarrow f''(x_0) = 0$

CRITERIO PARA DETECTAR EL TIPO DE CURVATURA

$f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ f es **convexa** en x_0
$f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ f es **cóncava** en x_0
$f''(x_0) = 0$ y $f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ f tiene un **punto de inflexión** en x_0

APLICACIÓN A LA IDENTIFICACIÓN DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Si $f'(x_0) = 0$ y existe $f''(x_0)$, entonces:

- Si $f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ Es un mínimo relativo en x_0
- Si $f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ Es un máximo relativo en x_0
- Si $f''(x_0) = 0 \Rightarrow$????

10.4 – OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONES

Con mucha frecuencia aparecen problemas físicos, geométricos, económicos, biológicos,… en los que se trata de optimizar una función (hacer máximo un volumen, unos beneficios, una población; hacer mínimos unos costes o un área,…).

- Calculamos la función a optimizar (normalmente dependerá de dos variables) f(x,y)
- Buscamos una relación entre las variables: Ecuación g(x,y) = 0
- Despejamos una incógnita de la ecuación (g(x,y) = 0) y la sustituimos en la función f(x,y) con lo cual la función ya sólo dependerá de una variable f(x)
- Optimizamos la función f(x): f ´(x) = 0 y comprobamos si son máximos o mínimos.

EXTREMOS ABSOLUTOS: CÁLCULO DE LOS EXTREMOS DE UNA FUNCIÓN f(x) EN UN INTERVALO [a,b]

a) **Si f es derivable en [a,b],** los máximos y mínimos absolutos están entre los puntos singulares (f ´(x) = 0) y los correspondientes extremos del intervalo:
   - Resolvemos la ecuación f ´(x) = 0
   - Seleccionamos la raíces x_1, x_2, … que están entre a y b
   - Se calcula: f(a), f(x_1), f(x_2),…., f(b)
   - El valor máximo será el máximo y el valor mínimo será el mínimo.

b) **Si hay algún punto en [a,b] en el que la función no sea derivable**, aunque si continua, calcularemos, además, el valor de f en ese punto, pues podría ser un extremo.

c) **Si f no es continua en algún punto x_0 de [a,b],** estudiaremos el comportamiento de la función en las cercanías de x_0.

10.5 – LA DERIVACIÓN PARA EL CÁLCULO DE LÍMITES. REGLA DE L´HÔPITAL

Sean f y g funciones derivables en un entorno (a – r, a + r) del punto a y el $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$, entonces la regla de L´Hôpital me dice que $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

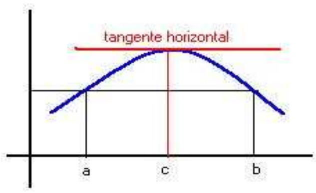
10.6 – TEOREMAS DE DERIVABILIDAD

TEOREMA DE ROLLE

Enunciado:

$$\left.\begin{array}{l} \text{f continua en } [a,b] \\ \text{f derivable en } (a,b) \\ f(a)=f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Existe algún punto } c\in(a,b) \text{ tal que } f\,'(c)=0$$

Interpretación geométrica: Existe algún punto entre a y b donde la recta tangente en dicho punto es paralela al eje de abscisas.

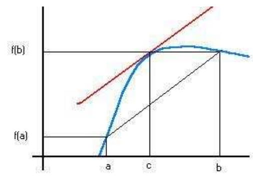


TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Enunciado:

$$\left.\begin{array}{l} \text{f continua en } [a,b] \\ \text{f derivable en } (a,b) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Existe algún punto } c\in(a,b) \text{ tal que } f\,'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Interpretación geométrica: Existe algún punto entre a y b donde la recta tangente en dicho punto es paralela a la recta que pasa por los puntos A(a,f(a)), B(b,f(b))



10.7 – APLICACIONES TEÓRICAS DEL TEOREMA DEL VALOR MEDIO

FUNCIÓN CONSTANTE

f es continua en [a,b] y derivable en (a,b). Si f ´(x) = 0 en todos los puntos de (a,b), entonces f es constante en [a,b]

FUNCIÓN CRECIENTE

f es continua en [a,b] y derivable en (a,b). Si f ´(x) > 0 en todos los puntos de (a,b), entonces f es creciente en [a,b].

MÍNIMO RELATIVO

Si f ´(x_0) = 0 y f ´´(x_0) > 0, entonces f presenta un mínimo en x_0.